Chris Heunen

Zeker weten? Bewijs het dan maar eens!

Waarom gaat de zon op, waarom is gras groen, waarom is water nat? Kleine kinderen kunnen je met zulke vragen bijkans tot waanzin drijven. Na je wanhopige antwoord komen ze met nieuwe problemen op de proppen. Argeloos leggen ze de kern van de filosofie bloot: eindeloos vragen stellen. Vreemd genoeg lijkt deze neiging met de jaren weg te ebben. Volwassenen nemen liever dingen voor zeker aan, dan voortdurend aan alles te moeten twijfelen.

Kinderlijke nieuwsgierigheid is de hoofdoorzaak van wat wij 'wetenschap' noemen; die volwassenen als een onschatbaar goed van het menselijk intellect beschouwen. Het antwoord op een 'kinderlijke' *waarom*-vraag vormt het wezen van wetenschap: een beargumenteerde redenering. En een van de meest geavanceerdere vormen ervan is het wiskundig bewijs.

Onweerlegbaar

Verwar dit wiskundige 'bewijs' niet met juridisch bewijs. Van Dale vertelt ons dat een bewijs niets minder is dan een 'feit of redenering waaruit de juistheid van een bewering onweerlegbaar blijkt'. De crux zit 'm natuurlijk in dat ‘onweerlegbaar’. Zelfs als op iedere vierkante centimeter van het slachtoffer vingerafdrukken van de verdachte te vinden zijn, staat diens schuld theoretisch niet honderd procent vast. Lees de detectiveverhalen van Agatha Christie er maar op na. Omgekeerd kan zelfs het meest vergezochte niet met volledige zekerheid worden ontkracht. Wie kan met *absolute* stelligheid beweren dat moleculen niet per ongeluk zó kunnen samenklonteren dat vingerafdrukken spontaan ontstaan?

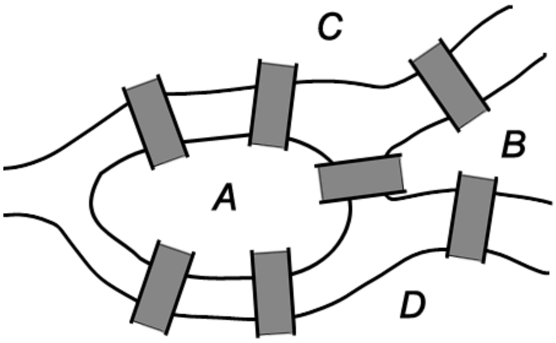
Geruststelling

Toch kennen we wel degelijk absolute zekerheden. Gelukkig maar. Daar zorgt de wiskunde voor. Anders dan bijvoorbeeld de natuurkunde pretendeert deze wetenschap helemaal niet dat haar basisaannames stoelen op realiteit – wat die ook mag zijn. Ze doet ze gewoon, en het maakt niets uit wat ze voorstellen. Het zijn de regels van het wiskundig spel. Omdat gehele getallen per definitie (!) even of oneven zijn, staat tot in lengte van dagen vast dat een kwadraat net zo even is als zijn wortel. Dus als 2 een even getal is, dan is 2 kwadraat, 4 dus, dat ook. Als 4 een even getal is, dan is de wortel daaruit, 2 dus, dat evenzeer.
Laten we eens genoeglijk van gedachten wisselen over de mathematische gedachtegang. Nou ja, eerlijk is eerlijk, als schrijver zal *ik* waarschijnlijk het hoogste woord voeren.

Een voorbeeld

We gaan naar Königsberg, eens de hoofdstad van Oost-Pruisen. Door het stadje stroomt een rivier die het verdeelt in twee delen om eiland A (zie figuur 1). Zeven bruggen boden ooit overgangen tussen de vier landmassa’s A, B, C en D. Een vraag is nu: is het mogelijk om op één stuk land te starten, elke brug precies een keer aan te doen en weer op het beginpunt te eindigen (uiteraard zonder nat te worden)? Het lijkt misschien een kinderachtig probleem, maar wie het serieus neemt, verkeert in goed gezelschap. Een beroemd wiskundige, Leonhard Euler, startte met de oplossing van juist *dit* probleem een nieuwe tak van (wiskundige) sport: de *grafentheorie*.

Na wat proberen, zul je waarschijnlijk vermoeden dat zo'n route niet bestaat. Maar een leuke vraag is nu om het bewijs daarvan te leveren. Als je de wandeling wel kon maken, zou dat bewijs gemakkelijk zijn: je stippelt gewoon de route uit en zegt "zie zelf maar". Echter, als de wandeling onmogelijk is, wordt die bewijstaak lastiger. We moeten dan niet alleen aantonen dat wij het niet kunnen, maar dat letterlijk elke poging van iedereen zal mislopen.

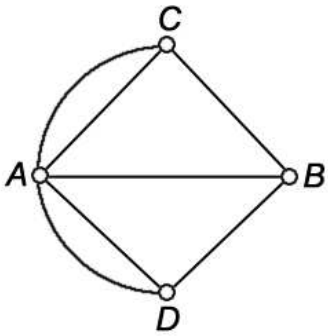


Figuur 1 – De bruggen van Königsberg

Een model

Laten we eerst alle overbodige details wegsnoeien: het enige dat er feitelijk toe doet, kunnen we weergeven met een schema als dat in figuur 2. Zoiets noemen we een *graaf*: de stukken land A, B, C en D stellen we voor met *punten*, de bruggen met verbindingen (*lijnen*) tussen de punten.

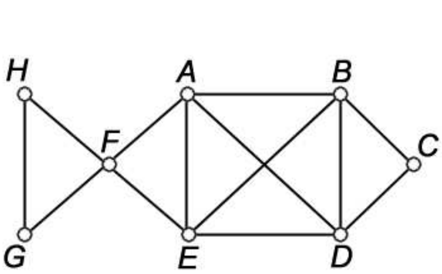
Het eerste wat we opmerken, is dat de graaf *samenhangend* moet zijn, willen we alle punten kunnen aandoen. Als er een paar geïsoleerd lagen, dan konden we daar überhaupt niet komen. Een wandeling van het gevraagde type noemen we trouwens *Eulerisch*. Met dank dus aan mijnheer Euler.



Figuur 2 – graaf van de situatie

Een oplossing

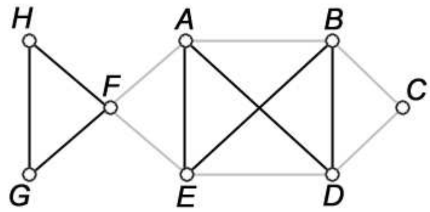
Voorts valt ons op dat in elk punt een even aantal lijnen moet samenkomen (dat aantal noemen we de *graad* van een punt: de graad van C is hier dus drie). Immers, als we over een lijn naar een punt wandelen, willen we daarna ook weer weg kunnen, en wel over een andere lijn. Hierna zijn die twee lijnen 'afgevallen' voor de resterende tocht. Zo moet dus de graad van elk punt een veelvoud van twee zijn, oftewel even. De begin- en eindpunten zijn speciale gevallen, maar ook hier is snel in te zien dat ze van even graad moeten zijn. Welnu, in onderhavige graaf is er zo'n punt met oneven graad. Sterker nog: élk punt is oneven qua graad. Dus de gevraagde wandeling is onmogelijk. En nu hebben we onszelf overtuigd dat zo'n route in de gegeven situatie tot het einde der tijden niet zal bestaan.



Figuur 3 – een andere graaf

Een veralgemenisering

Euler zelf ging nog verder: hij bewees het omgekeerde. Als een graaf samenhangend is, en elk punt een even graad heeft, is er een rondgang waarbij elke lijn precies een keer wordt gebruikt. Dit kun je doen met een methode die op *inductie* lijkt: je maakt eerst een klein circuit dat voldoet, en breidt dat vervolgens stapje voor stapje uit naar de hele graaf. Kijk eens naar de graaf in figuur 3. We beginnen met een klein circuitje, dat bij A begint: bijvoorbeeld ABCDEFA. Dit is duidelijk nog niet Eulerisch, omdat het nog een hoop lijnen niet bevat. Als we echter de reeds gebruikte lijnen wegvegen, houden we figuur 4 over. Hierin zien we weer een simpele rondgang, die niettemin niet te min voor ons is: FGHF. Deze raakt de eerdere ABCDEFA in F. Omdat deze nieuwe wandeling geen lijnen met de oude gemeenschappelijk kán hebben, kunnen we hem dus net zo goed in de oude meenemen zodra we bij F zijn aangekomen: ABCDEFGHFA. In de volgende stap kunnen we nog ADBEA toevoegen bij, zeg, A. Nu hebben we alle lijnen gebruikt in onze wandeling, en was de graaf dus Eulerisch. Overtuig jezelf nu dat deze methode altijd toepasbaar is op een samenhangende graaf met punten van even graad. Als er maar één punt is, is de rondgang die 'alle' lijnen aandoet flauw. Als er twee punten zijn van even graad, kunnen we altijd een 'simpel' rondje lopen. En als we gebruikte lijnen even weghalen, blijven alle punten van even graad. Omdat de graaf samenhangend was, kunnen we tenslotte in de overgebleven lijnen nog een simpel rondje vinden, en zo verder.



Figuur 4 – halverwege

Over notatie

Om het nu helemaal waterdicht te timmeren, brengen beroepswiskundigen bovenstaande redenering niet in Nederlands of Engels, maar als formalisme. Dat zijn dus die enge tekens en formules waar iedereen altijd aan denkt bij het woord 'wiskunde'. Maar zoals je ziet, is de basis ongelooflijk simpel. In wezen komt het neer op je gezonde verstand gebruiken. En zo is het met veel bewijzen: het enige waartoe de formele notatie dient, is het wegnemen van eventuele dubbelzinnigheden in de formulering.

Eindnoot

Veel wiskunde komt neer op puzzelen, en meestal moet je daarbij erg inventief en creatief knutselen. (Bij het bruggenvoorbeeld heb ik mij beijverd deze puzzelgedachte uit te dragen.) Vaak moet je – net als in Königsberg – een nieuw model verzinnen voor je probleem, en de kunst is dan om dat zo elegant en algemeen mogelijk te doen. Naast het blote bestaansfeit van een bewijs in de echte zin van het woord is dat voor velen de grootste charme van wiskunde. En juist dát wordt nu vaak vergeten… As je zo'n puzzel, in pure vorm, in al zijn algemeenheid hebt opgelost, voelt dat heel prettig aan. Dan wil je het eigenlijk nog wel een keertje doen…