Conjugaison

Nathanaël FIJALKOW

23 juin 2011

1 Définitions, énoncé du problème

Soit n un entier naturel. Nous considérons le groupe $\mathfrak{S}_n$ (pour la composition, notée $\circ$) des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Les permutations alternées forment un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ que l'on note $\mathfrak{A}_n$, défini comme le noyau de la signature, unique morphisme non trivial (pour $n \geqslant 2$) de $\mathfrak{S}_n$ vers $\{-1, 1\}$, noté ε.

Nous définissons deux actions sur le groupe $\mathfrak{S}_n$. La première action est la conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même : pour $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit $\tau \bullet \sigma = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$. L'opération $\bullet$ est une action de groupe :

$$\mathrm{id} \bullet \sigma = \sigma \qquad \text{et} \qquad \tau_1 \bullet (\tau_2 \bullet \sigma) = (\tau_1 \circ \tau_2) \bullet \sigma.$$

La seconde action est obtenue par restriction de la première au groupe alterné : $\mathfrak{A}_n$ agit sur $\mathfrak{S}_n$ par conjugaison.

Pour une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et G l'un des deux groupes $\mathfrak{A}_n$ ou $\mathfrak{S}_n$, le sous-groupe de G donné par $\{\tau \in G \mid \tau \bullet \sigma = \sigma\}$ est appelé le stabilisateur de σ dans G, et est noté $\mathrm{Stab}_G(\sigma)$. Lorsque $G = \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{Stab}_G(\sigma)$ n'est autre que le groupe des permutations qui commutent avec σ. L'ensemble $\{\tau \bullet \sigma\}_{\tau \in G}$ est l'orbite de σ sous G, encore appelé classe de conjugaison de σ sous G, on le note $G \bullet \sigma$.

Le problème qui nous intéresse concerne les classes de conjugaison sous $\mathfrak{A}_n$, et leur stabilité par passage à l'inverse. Il est facile de vérifier (on le fera dans la partie qui suit) que toute permutation est conjuguée à son inverse dans $\mathfrak{S}_n$, propriété que l'on peut reformuler ainsi : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous avons $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$. Cependant, les classes de conjugaison sous $\mathfrak{A}_n$ n'ont pas cette agréable propriété : par exemple dans $\mathfrak{S}_3$,

$$(1, 2, 3)^{-1} = (1, 3, 2) \notin \mathfrak{A}_3 \bullet (1, 2, 3) = \{(1, 2, 3)\}.$$

Tout n'est pas perdu ! On peut vérifier que dans $\mathfrak{S}_4$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ il est vrai que $\sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_4 \bullet \sigma$. Cela nous mène à l'énoncé de notre problème :
Trouver les entiers n tels que

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \forall \sigma \in \mathfrak{A}_n \quad \sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_n \bullet \sigma,$$

c'est-à-dire les entiers n tels que tous les éléments de $\mathfrak{A}_n$ sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ à leur inverse.

On peut même être plus gourmand et demander :

$$(\mathcal{Q}_n) \qquad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_n \bullet \sigma.$$

Ce problème est relié à la théorie des représentations linéaires des groupes symétriques et alternés. Formulé dans ce cadre, il équivaut à déterminer les valeurs de n pour lesquelles la table de caractères de $\mathfrak{A}_n$ est réelle ou entière, comme nous en informe le théorème (admis) ci-dessous.

Théorème 1. *[1] Pour tout groupe fini G,*

(A) Tout caractère de G est à valeurs réelles si et seulement si pour tout $g \in G$, g^{-1} est conjugué g ;

(B) Tout caractère de G est à valeurs entières si et seulement si pour tout $g, g' \in G$, si $\langle g \rangle = \langle g' \rangle$ (i.e ils engendrent le même sous-groupe), alors g et g' sont conjugués.

2 Étude de l'action par conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$

Commençons par une remarque préliminaire :

$$(\mathcal{P}_n) \iff \forall \sigma \in \mathfrak{A}_n \quad \mathfrak{A}_n \bullet \sigma = \mathfrak{A}_n \bullet \sigma^{-1},$$

$$(\mathcal{Q}_n) \iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \mathfrak{A}_n \bullet \sigma = \mathfrak{A}_n \bullet \sigma^{-1}.$$

En effet, deux orbites qui se rencontrent sont égales.

Démontrons maintenant le résultat annoncé dans l'introduction qui décrit la situation pour $\mathfrak{S}_n$, à savoir : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\mathfrak{S}_n \bullet \sigma^{-1} = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$.

Pour mener l'étude des classes de conjugaison, l'outil principal dont nous disposons est la décomposition en cycles à supports disjoints. Rappelons que toute permutation se décompose comme un produit de cycles à supports disjoints, de manière unique à l'ordre des facteurs près. La liste des longueurs de ces cycles constitue la structure orbitale d'une permutation, on la dénote par une suite croissante d'entiers délimitée par $\langle$ et $\rangle$. Par exemple $\langle 3, 5, 9 \rangle$ correspond à une permutation produit de trois cycles à supports disjoints, l'un de longueur 3, le deuxième de longueur 5, et le dernier de longueur 9. Il désigne donc un élément de $\mathfrak{S}_{17}$. La proposition 1 révèle le lien étroit entre la conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ et la structure orbitale :

Proposition 1. *Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si elles ont la même structure orbitale.*

Démonstration. Commençons par considérer le cas d'un m-cycle, noté $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Rappelons l'identité remarquable suivante, pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$\tau \circ (a_1, a_2, \dots, a_m) \circ \tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \dots, \tau(a_m)).$$

Nous en déduisons deux faits : d'abord, tous les conjugués d'un m-cycle sont des m-cycles, puis deux m-cycles quelconques sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$. En effet, soit $(a_1, \dots, a_m)$ et $(b_1, \dots, b_m)$ deux m-cycles, la permutation τ qui envoie a_i sur b_i pour chaque i conjugue le premier cycle en le second. Remarquons que le support de τ ($i.e$ l'ensemble des indices i tel que $\tau(i) \neq i$) est inclus dans $\{a_1, \dots, a_m\}$.

Le cas général se déduit du cas des cycles. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, dont la décomposition en cycles à supports disjoints est $c_1 \circ \cdots \circ c_k$. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$\tau \bullet \sigma = \tau \circ c_1 \circ \cdots \circ c_k \circ \tau^{-1} = (\tau \circ c_1 \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ c_2 \circ \tau^{-1}) \circ \cdots \circ (\tau \circ c_k \circ \tau^{-1}).$$

Donc d'après ce qui précède sur les cycles, tous les conjugués de σ ont la même structure orbitale. Réciproquement, considérons σ et σ' ayant la même structure orbitale, notons $c_1 \circ \cdots \circ c_k$ et $c'_1 \circ \cdots \circ c'_k$ les décompositions en cycles à supports disjoints, où c_i et c'_i sont des cycles de même longueur pour chaque i. D'après ce qui précède, il existe τ_i conjuguant c_i en c'_i, dont le support est inclus dans celui de c_i. Les c_i étant à supports disjoints, la permutation $\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_m$ conjugue σ en σ'. □

Lemme 1. *Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_n \bullet \sigma^{-1} = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$.*

Démonstration. Il suffit de constater que σ et σ^{-1} ont la même structure orbitale, pour s'en remettre à la proposition 1. En effet, si σ a pour décomposition en cycles à supports disjoints $c_1 \circ \cdots \circ c_k$, alors $\sigma^{-1} = c_k^{-1} \circ \cdots \circ c_1^{-1}$, qui est également une décomposition en cycles à supports disjoints. Par unicité d'une telle décomposition, ceci donne la structure orbitale de σ^{-1}. □

3 Conjugaison d'un cycle de longueur maximale

On poursuit l'étude de la conjugaison d'un élément en son inverse dans le groupe symétrique, en portant notre attention sur le cas d'un cycle de longueur maximale. Le lemme 2 caractérise le stabilisateur, puis le lemme 3 calcule la signature des éléments qui conjuguent un cycle de longueur maximale en son inverse. La notation $\langle \sigma \rangle$ désigne le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par σ.

Lemme 2 (Stabilisateur d'un cycle de longueur maximale)**.** *On considère $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ un cycle de longueur n dans $\mathfrak{S}_n$. Alors $Stab_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$.*

Démonstration. L'inclusion $\langle \sigma \rangle \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est claire. Pour la réciproque, raisonnons par cardinalité : σ est d'ordre n, donc engendre un sous-groupe de $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}$ d'ordre n. Montrons que $|\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)| = n$. Pour cela, on va montrer que $\tau \in \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est entièrement déterminée par l'image de 1. On aura ainsi construit une application injective de $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ dans $\{1, \dots, n\}$ qui sera donc une bijection. Comme τ commute avec σ, τ commute avec σ^{i-1} pour tout i. On en déduit que $\tau(i) = \tau \circ \sigma^{i-1}(1) = \sigma^{i-1} \circ \tau(1)$. Ainsi τ est bien déterminée par $\tau(1)$ et $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$. □

Lemme 3 (Conjugaison d'un cycle de longueur maximale en son inverse)**.** *On considère $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$ un cycle de longueur n dans $\mathfrak{S}_n$. On suppose que n est impair.*

▷ *Si $n \equiv 1\,[4]$ alors tout τ tel que $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ est dans $\mathfrak{A}_n$.*

▷ *Si $n \equiv 3\,[4]$ alors tout τ tel que $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ est dans $\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.*

Démonstration. Soit τ, τ' tel que $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1} = \tau' \circ \sigma \circ \tau'^{-1}$. On a alors $\tau'^{-1} \circ \tau \in \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$. Or d'après le lemme 2, $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$. Puisque n est impair, on a $\langle \sigma \rangle \subseteq \mathfrak{A}_n$. On en déduit que τ' est de la forme $\tau \circ \sigma^k$ pour un certain k, donc τ et τ' ont la même signature. Par ailleurs, remarquons que le produit des $(n-1)/2$ transpositions $(1, n)$, $(2, n-1), \ldots, ((n-1)/2, (n+3)/2)$ conjugue σ en σ^{-1}. Ainsi toutes les permutations τ telles que $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ ont pour signature $(-1)^{(n-1)/2}$. Ceci permet de conclure. □

4 Étude algébrique des classes de conjugaison

Le titre paraît ironique puisque les classes de conjugaison n'ont pas de structure algébrique (a priori) ! Cependant, on peut ramener leur étude à celle des stabilisateurs via la bijection naturelle qui suit. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et $x \in X$, alors l'application

$$\varphi : \begin{cases} G \longrightarrow G \bullet x \\ g \longmapsto g \bullet x \end{cases}$$

est surjective par définition, et par passage au quotient par $\mathrm{Stab}_G(x)$, elle induit la bijection $G/\mathrm{Stab}_G(x) \equiv G \bullet x$. En procédant ainsi pour les deux actions considérées, on obtient :

$$\mathfrak{A}_n \bullet \sigma \equiv \frac{\mathfrak{A}_n}{\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_n \bullet \sigma \equiv \frac{\mathfrak{S}_n}{\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)}$$

Le rapport entre stabilisateurs sous $\mathfrak{S}_n$ et sous $\mathfrak{A}_n$ nous permettra donc d'avancer notre étude sur les classes de conjugaison sous $\mathfrak{S}_n$ et sous $\mathfrak{A}_n$. Pour F un sous-groupe d'un groupe G fini, on note $[G : F]$ l'indice de F dans G, égal au cardinal de G/F (vu comme ensemble).

Lemme 4 (Comparaison des stabilisateurs sous $\mathfrak{S}_n$ et sous $\mathfrak{A}_n$)**.** *Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :*

▷ $[\mathit{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) : \mathit{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)] \in \{1, 2\}$.

▷ $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma \iff [\mathit{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) : \mathit{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)] = 2$.

Démonstration. On remarque que $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) = \mathfrak{A}_n \cap \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ et donc que $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ est le noyau de la signature restreinte à $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$. La factorisation de ce morphisme donne une injection de $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)/\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ dans $\{-1, 1\}$. Comme $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma \subseteq \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$, la seconde partie résulte du passage aux cardinaux des deux bijections mentionnées ci-dessus. □

Revenons à notre problème. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma \subseteq \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$ et $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma^{-1} \subseteq \mathfrak{S}_n \bullet \sigma^{-1}$. Le lemme 1 donne l'égalité des deux termes de droite : $\mathfrak{S}_n \bullet \sigma = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma^{-1}$. De deux choses l'une :

- ▷ soit $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$ et alors $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma^{-1} = \mathfrak{A}_n \bullet \sigma$;
- ▷ soit $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma \neq \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$ et l'orbite sous $\mathfrak{S}_n$ se divise en deux orbites sous $\mathfrak{A}_n$, d'après le lemme 4. Dans ce cas, il faut étudier en détail la question $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma^{-1} = \mathfrak{A}_n \bullet \sigma$.

5 Résolution du problème

Dans un premier temps, on va caractériser les permutations σ telles que $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$ ou encore, d'après le lemme 4, les permutations σ telle que $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ contient un élément qui n'est pas dans le groupe alterné. La proposition suivante donne la caractérisation de ces permutations.

Proposition 2. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les orbites $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma$ et $\mathfrak{S}_n \bullet \sigma$ sont égales si et seulement si σ possède dans sa décomposition en cycles à supports disjoints un cycle de longueur paire ou deux cycles distincts de même longueur impaire.*

Démonstration. Notons que dans la décomposition en cycles à supports disjoints, les points fixes sont des cycles de longueur 1. Supposons que σ possède dans sa décomposition en cycles à supports disjoints un cycle de longueur paire c, alors $c \in \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) \setminus \mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ et donc $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$.

Supposons que σ possède dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints deux cycles distincts c_1 et c_2 de même longueur impaire. On les note $c_1 = (a_1, \dots, a_k)$ et $c_2 = (b_1, \dots, b_k)$. La permutation $(a_1, b_1) \circ \ldots \circ (a_k, b_k)$ est alors dans $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ mais pas dans $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ puisque k est impair. Ainsi $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma = \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$.

Réciproquement, supposons que σ ne possède dans sa décomposition en cycles à supports disjoints que des cycles de longueur impaire deux à deux distinctes et montrons que $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) \subseteq \mathfrak{A}_n$. L'égalité $\tau \circ c_1 \cdots c_k \circ \tau^{-1} = c_1 \circ \ldots \circ c_k$ se réécrit :

$$(\tau \circ c_1 \circ \tau^{-1}) \circ \ldots \circ (\tau \circ c_k \circ \tau^{-1}) = c_1 \circ \cdots \circ c_k.$$

Chaque terme $\tau \circ c_i \circ \tau^{-1}$ est un cycle de même longueur que c_i. L'unicité de la décomposition en cycles impose $\tau \circ c_i \circ \tau^{-1} = c_i$ puisque c_i est le seul cycle à droite de même longueur. D'après le lemme 2, on en déduit que τ est, sur le support de chaque cycle, une puissance de ce cycle. Donc τ est entièrement déterminée (la réunion des supports des cycles est $\{1, \dots, n\}$ puisqu'on tient compte des cycles de longueur 1) : c'est un produit de puissances de cycles de longueur impaire. En particulier, $\tau \in \mathfrak{A}_n$. Finalement, on en déduit que $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma) = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ et, le lemme 4 permet de conclure $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma \neq \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$. □

Il reste à présent à étudier le cas $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma \neq \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$: est-ce que σ^{-1}, qui est dans $\mathfrak{S}_n \bullet \sigma$, est aussi dans $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma$? Sous cette hypothèse, par la proposition précédente (proposition 2), σ est le produit de cycles de longueurs impaires deux à deux distinctes.

Remarquons que ce cas discriminant $\mathfrak{A}_n \bullet \sigma \neq \mathfrak{S}_n \bullet \sigma$ implique $\sigma \in \mathfrak{A}_n$, donc que les permutations éventuellement non conjuguées à leurs inverses dans $\mathfrak{A}_n$ sont dans $\mathfrak{A}_n$. Les autres ne sont pas un obstacle et finalement, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\mathcal{Q}_n) \Longleftrightarrow (\mathcal{P}_n)$.*

Par ailleurs, le lemme 3 permet maintenant de déterminer quand une permutation ≪ qui pose problème ≫ (c'est-à-dire qui est un produit de cycles à supports disjoints de longueur impaires et distinctes) est conjuguée en son inverse par un élément de $\mathfrak{A}_n$.

Proposition 4. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un produit de cycles à supports disjoints de longueur impaire et distinctes. Alors σ est conjugué en son inverse par un élément de $\mathfrak{A}_n$ si et seulement si le nombre de cycles de longueur congrue à 3 modulo 4 est pair.*

Démonstration. Par le même raisonnement que celui de la preuve de la proposition 2, l'égalité $\tau \circ c_1 \circ \cdots \circ c_k \circ \tau^{-1} = c_1^{-1} \circ \cdots \circ c_k^{-1}$ donne $\tau \circ c_i \circ \tau^{-1} = c_i^{-1}$. Notons S_i le support du cycle c_i, la réunion des S_i est $\{1, \ldots, n\}$ (puisqu'on prend en compte les cycles de longueur 1). Montrons que S_i est stable par τ. Soit $c_i = (a_1, \ldots, a_\ell)$. On a

$$\tau \circ c_i \circ \tau^{-1} = (\tau(a_1), \ldots, \tau(a_\ell)) = (a_\ell, \ldots, a_1)$$

ce qui montre que $\tau(a_j) \in \{a_1, \ldots, a_\ell\}$ pour tout j. Donc S_i est stable par τ et la restriction de τ sur S_i conjugue c_i en son inverse. Ainsi τ est entièrement déterminé puisque déterminé sur chacun des S_i. Donc $\tau = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ où τ_i a pour support S_i et conjugue c_i en son inverse. Appliquons le lemme 3 à chacun des τ_i : ceux dont la longueur est congrue à 1 modulo 4 sont dans $\mathfrak{A}_n$, ceux dont la longueur est congrue à 3 modulo 4 sont dans $\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$. Donc $\tau \in \mathfrak{A}_n$ si et seulement s'il y a un nombre pair de cycles de longueur congrue à 3 modulo 4. □

La proposition précédente donne alors un critère simple pour savoir si une permutation est conjuguée à son inverse dans $\mathfrak{A}_n$. Le problème initial se réécrit ainsi : trouver les valeurs de n pour lesquelles toutes les permutations dont la décomposition en cycles à supports disjoints ne fait intervenir que des cycles de longueurs impaires et distinctes ont un nombre pair de cycles de longueur congrue à 3 modulo 4. La question se résume alors ainsi : trouver les valeurs de n pour lesquelles toutes les décompositions de n en somme de nombres impairs distincts font intervenir un nombre pair de nombres congrus à 3 modulo 4.

Dans ce qui suit, on propose une étude exhaustive des valeurs de n suivant leur congruence modulo 4 : on procède par la négative en exhibant des décompositions qui contredisent $(\mathcal{P}_n)$, c'est-à-dire qui ont un nombre impair de cycles de longueur congrue à 3 modulo 4.

- ▷ On suppose que $n \equiv 0\,[4]$. Notons que $\mathcal{P}_0$ est vérifiée. Pour $n = 4$, $(1, 3)$ est un contre-exemple. Pour $n > 4$, $\langle 3, n-3 \rangle$ est un contre-exemple, car $n - 3 \equiv 1\,[4]$.

- ▷ Si $n \equiv 3\,[4]$ alors $\langle n \rangle$ est un contre-exemple.
- ▷ On suppose que $n \equiv 1\,[4]$. Notons que $\mathcal{P}_1$ est vérifiée. Pour $n = 5$, la seule décomposition de 5 en somme de nombres impairs distincts est $\langle 5 \rangle$ et $\mathcal{P}_5$ est donc vérifiée. Pour $n = 9$, $\langle 1, 3, 5 \rangle$ donne un contre-exemple. Pour $n > 9$, alors $\langle 1, 5, n-6 \rangle$ est un contre-exemple, car $n - 6 \equiv 3\,[4]$.
- ▷ On suppose que $n \equiv 2\,[4]$. Pour $n = 2, 6, 10, 14$, on vérifie que les cas qui se présentent ne sont pas mis en défaut. Par exemple, pour $n = 14$, les différents cas sont $\langle 13 \rangle$, $\langle 3, 11 \rangle$, $\langle 5, 9 \rangle$. Ainsi $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_6$, $\mathcal{P}_{10}$, $\mathcal{P}_{14}$ sont vérifiées. Pour $n > 14$, $\langle 1, 3, 5, n-9 \rangle$ est un contre-exemple car $n - 9 \equiv 1\,[4]$.

Il ne reste plus qu'à conclure :

Théorème 2. *On a* $(\mathcal{Q}_n) \iff (\mathcal{P}_n) \iff n \in \{0, 1, 2, 5, 6, 10, 14\}$.

Le résultat du théorème 2 est extrait du livre de James et Kerber [1] qui étudie les représentations linéaires des groupes symétriques et alternés. Il est formulé comme suit :

Théorème 3. *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*,*

(1) tout caractère de $\mathfrak{S}_n$ *est à valeurs entières ;*

(2) tout caractère de $\mathfrak{A}_n$ *est à valeurs réelles si et seulement si* n *appartient à l'ensemble* $\{0, 1, 2, 5, 6, 10, 14\}$.

Remerciements Je remercie vivement Vincent Beck pour son implication dans la recherche et dans la rédaction de cet article.

Références

[1] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Addison-Wesley, 1981.